第三节 解析函数

- 1. 复变函数的导数定义
- 2. 解析函数的概念
- 3. 函数解析的充要条件

1. 复变函数的导数

(1) 导数定义

定义　设函数$w=f(z)$　$z\in D$, 且z_0、$z_0+\Delta z\in D$,

如果极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，则称函数

$f(z)$在点z_0处可导。称此极限值为$f(z)$在z_0的导数，

记作 $$f'(z_0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

如果$w=f(z)$在区域D内处处可导，则称$f(z)$在区域D内可导。

(2)求导公式与法则

① 常数的导数 $c'=(a+ib)'=0$.

② $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n是自然数).

③ 设函数$f(z)$, $g(z)$ 均可导，则

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z),$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)},(g(z)\neq 0)$$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面上处处可导；

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面上（除分母为0点外）处处可导，$Q(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m$.

④复合函数$w=f(h), h=g(z)$的导数：

$$[f(g(z))]'=\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dh}\cdot\frac{dh}{dz}=f'(h)g'(z)$$

$$=f'(g(z))g'(z).$$

⑤ 反函数的导数：设$w=f(z)$与$z=\varphi(w)$互为单值的反函数，且$\varphi'(w)\neq 0$。

$$f'(z)=\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{\varphi'(w)}$$

例1　已知 $f(z)=(z^2+5z)^2-\dfrac{1}{z-1}$，求$f'(z)$

解　$$f'(z)=2(z^2+5z)(2z+5)+\frac{1}{(z-1)^2}$$

例2　问：函数$f(z)=x+2yi$是否可导？

解　$$\because \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{x+\Delta x+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\begin{cases}1 & \text{当}\Delta y=0,\Delta x\to 0\text{时}\\ 2 & \text{当}\Delta x=0,\Delta y\to 0\text{时}\end{cases}$$

所以函数处处不可导.

注：（1）复变函数在一点处可导，要比实函数在一点处可导要求高得多，也复杂得多，这是因为 $\Delta z \to 0$是在平面区域上以任意方式趋于零的原因。

（2）在微积分中要举出一个处处连续，但处处不可导的例题是很困难的，在复变函数中，却轻而易举。

例如：函数$f(z)=x+2yi$

(3)可导与连续

若 $w=f(z)$ 在点 z_0 处可导 $\Longrightarrow w=f(z)$ 点 z_0 处连续.

反之不真。

2. 解析函数的概念

定义 如果函数$w=f(z)$在z_0及z_0的某个邻域内处处可导，则称$f(z)$在z_0解析；

如果$f(z)$在区域D内每一点都解析，则称$f(z)$在D内解析，或称$f(z)$是D内的解析函数(全纯函数或正则函数）。

如果$f(z)$在点z_0不解析，就称z_0是$f(z)$的奇点。

(1)$w=f(z)$在D内解析 $\Leftrightarrow$ 在D内处处可导。

(2)函数$f(z)$在z_0点可导，未必在z_0解析。

例如

- $w=z^2$ 在整个复平面处处可导，故是整个复平面上的解析函数；
- $w=1/z$，除去$z=0$点外，是整个复平面上的解析函数；
- $w=x+2yi$在整个复平面上处处不解析 (见例2)。

$w=|z|^2$ 仅在0点可导，但处处不解析　见例3(3)

定理　设$w=f(z)$及$w=g(z)$是区域D内的解析函数，

则$f(z)\pm g(z)$，$f(z)g(z)$及$f(z)/g(z)$　$(g(z)\neq 0$时)

均是D内的解析函数。

由以上讨论$\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$是整个复平面上的解析函数;

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$是复平面上(除分母为0点外)的解析函数.

判断 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2}$的解析性

$$z^2+2=z^2-2i^2=(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i)$$

$$z^2+2=0 \Rightarrow z=\pm\sqrt{2}i$$

$\dfrac{1}{z^2+2}$除$z=\pm\sqrt{2}i$外处处解析

定理 设复合函数 $w = f[g(z)]$,

若 $w = f(h)$ 在 h 平面上的区域G内解析，

$h = g(z)$ 在 z 平面上的区域D内解析，

则 $w = f[g(z)]$ 在D内处处解析。

问题 如何判断函数的解析性呢？

本节从函数 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 的可微性，探求函数 $w=f(z)$ 的可微性，从而导出判别函数解析的一个充分必要条件，并给出解析函数的求导方法。

3. 函数解析的充要条件

设$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点

$z=x+iy$可导

又$\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$

$$=\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}$$

若沿//实轴的方式$\Delta z\to 0(\Delta y=0,\ \Delta x\to 0)$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

若沿//虚轴的方式$\Delta z \to 0 (\Delta x = 0, \Delta y \to 0)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z)\exists$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

记忆

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial u}{\partial x} & - & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}$$

定义　方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}}$$

称为Cauchy-Riemann方程(简称C-R方程).

定理1 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内有定义，则$f(z)$在点$z=x+iy\in D$处可导的充要条件是$u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x,y)可微，且满足Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

上述条件满足时,有

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y-iu_y=v_y+iv_x$$

定理2 函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内解析充要条件

是$u(x, y)$和$v(x,y)$在D内可微，且满足

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

定理提供了判别函数解析性的方法及如何求$f(z)$的导数值.

步骤： i)判别$u(x,y)$，$v(x,y)$的可微性（如：偏导数的连续） ii) 验证C-R条件.

iii)求导数： $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

2. 举例

例3 判定下列函数在何处可导，在何处解析：

(1) $w = |z|^2$

解(1) 设$z=x+iy$ $w=x^2+y^2$ $u= x^2+y^2$，$v=0$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

仅在点$z = 0$处满足C-R条件，故

$w = |z|^2$仅在0点可导，但处处不解析。

$$(2)\, f(z) = e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{x}\cdot e^{iy} = e^{z}$$

解 (2) $\because f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ 则 $u=e^{x}\cos y$, $v=e^{x}\sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

故 $f(z) = e^{x}(\cos y + i\sin y)$在全平面可导，解析。

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y = f(z)$$

$$(e^{z})' = e^{z}$$

例5 若$f'(z)\equiv 0 \quad z\in D \Rightarrow f(z)=C \quad z\in D$

证明 $\because f'(z)=u_x+iv_x=\frac{1}{i}u_y+v_y\equiv 0$

$\therefore u_x=v_x=u_y=v_y=0$

$du=u_x dx+u_y dy=0\Rightarrow u=C_1$ 同理$v=C_2$

$\Rightarrow f(z)=C_1+iC_2=C$(复常数)

$$f'(z)\equiv 0 \quad z\in D \Leftrightarrow f(z)=C \quad z\in D$$